Mathematisches Institut der Universität München, WISE 2019/20

Übungen zur Mathe III für Physiker

Prof.Dr.P.Pickl

Blatt 6

Aufgabe 1:

(a) Skizzieren Sie die folgenden Flächen und geben Sie jeweils eine Parametrisierung der Fläche an:

(i) den Graphen der Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$,

(ii) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 3 \, , z \geq 0\}$,

(iii) die Oberfläche des Zylinders mit Höhe H und Radius R.

(b) Bestimmen Sie die Schnittkurve der Fläche aus Aufgabe (a) Teil (ii) mit der durch $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \, , \, g(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix}$ gegebenen Fläche. Veranschaulichen Sie Ihr Ergebnis graphisch.

Aufgabe 2: Die Länge einer Kurve K ist definierbar als

$$L(K) = \int_I \sqrt{|\mathbf{\Phi}'(t)|^2} dt \, ,$$

wobei $\mathbf{\Phi} : I \subset \mathbb{R} \to K$ ein die Kurve einfach durchlaufender Weg ist.
Sei $f : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \, , \, f(x) = (1 - \frac{2}{3}x)^{\frac{3}{2}}$.

(a) Man berechne die Länge des Graphen von f.

(b) Finden Sie nun $s : [0,1] \to [0, L(K)]$ so, dass $\boldsymbol{\lambda}(q) = \mathbf{\Phi} \circ s^{-1}(q)$, mit $\mathbf{\Phi}$ wie in Teil (a), die Parametrisierung ist, die die Kurve mit Geschwindigkeit 1 durchläuft. (Analog der Eigenzeit in der relativistischen Physik.)

Aufgabe 3: Seien ϕ, θ die üblichen Koordinaten auf der Sphäre. Berechnen Sie explizit das Wegintegral(arbeitsintegral) eines Vektorfelds $\boldsymbol{f}$ über den Weg γ

$$\int_\gamma \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{s},$$

indem Sie eine detaillierte Parametrisierung der Wege angeben und veranschaulichen Sie sich jeweils deren Verlauf:

(a) für das Vektorfeld $\boldsymbol{f}_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 3z^2 \end{pmatrix}$ über den Weg γ_1 entlang des Längenkreises bei $\phi = \frac{\pi}{2}$ vom Nord- zum Südpol der Einheitsphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, sowie entlang eines Weges γ_2 auf der Einheitssphäre, für den in Kugelkoordinaten gilt $\phi = \theta \in [0, \pi]$.

(b) für das Vektorfeld $\boldsymbol{f}_2(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \\ -z \\ x+y \end{pmatrix}$ entlang der Wege γ_1 und γ_2 aus Teil a).

(c) Hätten Sie diese Ergebnisse auch ohne explizite Berechnung des Wegintegrals erhalten können?